Khnisse A.S :2011/2012

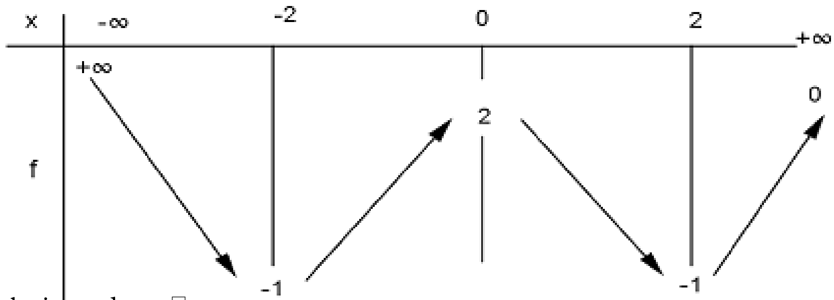
Devoir de contrôle N°2

Durée: 2.h

Exercice N°1: (4 pts)

Pour chacune des affirmations suivantes, **répondre par « VRAI » ou « FAUX » Sans justification.**

On donne ci-contre les variations d'une fonction f définie et dérivable sur ℝ



1/ L'inéquation $f(x) \leq -1$ n'admet pas de solutions dans ℝ

2/ Pour tout réel x on a : $f(x) \leq 2$

3/ La fonction f est paire

4/ $f'(1) > 0$

5/ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$

6/ $fof(0) = -1$

7/ $\lim\limits_{x \to +\infty} fof(x) = 0$

8/ $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{f(x)+1}{x+2} = 0$

Exercice N°2: (4pts)

L'espace est rapporté d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On donne les points $A(3,0,0) ; B(0,1,1)$ et $C(-1,1,2)$ et $D(3,1,1)$

1/ Montrer que ABC est triangle puis calculer son aire

2/a) Montrer que ABCD est un tétraèdre et calculer son volume

b) Déduire la distance DH où H le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC)

3/ Soit H' le projeté orthogonal de D sur la droite (AC)

a) Calculer $d(D,(AC))$

b) Montrer que le triangle DHH' est un triangle rectangle

Exercice N°3: (6pts)

L'espace est rapporté d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

On donne les points $A(1,0,0);B(0,0,1)$ et $C(1,-1,1)$

1/a) Déterminer $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$. Déduire que les points A, B et C déterminent un plan P.

b) Vérifier qu'une équation cartésienne de P est $x+y+z-1=0$

2/ Soit S l'ensemble des points M(x,y,z) de l'espace tels que : $x^2+y^2+z^2-2x-2z+1=0$

a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon R

b) Montrer que $S\cap P$ est le cercle circonscrit au triangle ABC

3/a)Déterminer une équation cartésienne de du plan Q passant par I et parallèle à P

b) Donner une représentation paramétrique de la droite Δ passant par A et perpendiculaire à P

c) Déterminer les coordonnées du point A' point d'intersection de Δ et Q

Exercice N°4(6 pts)

Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0=0 \\ U_{n+1}=\sqrt{3U_n+4} \end{cases}$; $n\in\mathbb{N}$

1/a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$; $0\le U_n\le 4$

b) Montrer que U est strictement croissante

c) Déduire que U est convergente est calculer sa limite

2/a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $0\le 4-U_{n+1}\le\frac{1}{2}(4-U_n)$

b) Déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $0\le 4-U_n\le 4(\frac{1}{2})^n$

c) Retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

3/ Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on pose : $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}U_k$

a) Montrer que $0\le 4n-S_n\le 4(1-(\frac{1}{2})^n)$

b) Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

Correction devoir de contrôle n°2(4sc)

Exercice N°1

1/ Faux 2/ Faux 3/ Faux 4/ Faux 5/ Faux 6/ Vrai 7/ Faux 8/ Vrai

Exercice N°2

1/ On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\1\\2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

- $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ d'où A ,B et C non alignés et par suite ABC est triangle
- $A_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{1^2+2^2+1^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ u.a

2/a) On a $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AD}=1\times0+2\times1+1\times1=3\neq0$ donc A,B,C et D ne sont pas coplanaires et par

suite ABCD est un tétraèdre de volume $V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{2}$ u.v

b) $[DH]$ est la hauteur issue de D du tétraèdre ABCD d'où $V=\frac{DH.A_{ABC}}{3}\Leftrightarrow DH=\frac{3.V}{A_{ABC}}=\frac{3}{\sqrt{6}}$

3/a) $d\left(D,(AC)\right)=\frac{\left\|\overrightarrow{DA}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}=\frac{\sqrt{1^2+4^2+4^2}}{\sqrt{4^2+1^2+2^2}}=\frac{\sqrt{33}}{\sqrt{21}}=\sqrt{\frac{11}{7}}$

b) $H'\in(AC)\subset(ABC)$ et $H\in(ABC)$ donc $(HH')\subset(ABC)$ or $(DH)\perp(ABC)$ donc $(HH')\perp(DH)$ d'où DHH' est triangle rectangle en H

Exercice N°3

1/a) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}0&-1\\1&1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1&0\\1&1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1&0\\0&-1\end{vmatrix}\vec{k}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ d'où A ,B et C non alignés et par suite ils déterminent un plan

b) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à P

$M(x,y,z)\in P\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})=0\Leftrightarrow x+y+z-1=0$ D'où le résultat.

2/a)

$$\begin{aligned}M(x,y,z)\in S&\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-2z+1=0\\&\Leftrightarrow(x-1)^2-1^2+y^2+(z-1)^2-1^2+1=0\\&\Leftrightarrow(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=1\end{aligned}$$

D'où S est une sphère de centre I(1 , 0 ,1) et de rayon R=1

b) A, B et C sont trois points du plan P et on vérifie facilement que A,B et C sont trois points de S d'où $S\cap P$ est le cercle circonscrit au triangle ABC

3/ a) $Q//P\Leftrightarrow Q:x+y+z+d=0$; Or $I(1,0,1)\in Q\Leftrightarrow1+0+1+d=0\Leftrightarrow d=-2$

Donc $Q:x+y+z-2=0$

b) $\Delta \perp P \Leftrightarrow \overrightarrow{n_p}$ est un vecteur directeur de Δ

$$M(x,y,z) \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{n_p} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases} \quad ; \ \alpha \in \mathbb{R}$$

c) $$A'(x,y,z) \in \Delta \cap P \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = \alpha \\ z = \alpha \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = \alpha \\ z = \alpha \\ \alpha + 1 + \alpha + \alpha - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A'\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Exercice N°4

1/a) Soit $P : \forall n \in \mathbb{N} \ ; \ 0 \leq U_n \leq 4$

- Pour $n = 0$ on a : $0 \leq U_0 = 0 \leq 4$ d'où P est vraie
- Soit $n \in \mathbb{N}$; Supposons que : $0 \leq U_n \leq 4$ et Montrons que $0 \leq U_{n+1} \leq 4$.

  on a : $0 \leq U_n \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq 3U_n \leq 12 \Leftrightarrow 4 \leq 3U_n + 4 \leq 16$

  $\Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{4} \leq \sqrt{3U_n + 4} \leq \sqrt{16} \Leftrightarrow 0 \leq U_{n+1} \leq 4$

Cl : $\forall n \in \mathbb{N} \ ; \ 0 \leq U_n \leq 4$

b) $U_{n+1}{}^2 - U_n{}^2 = 3U_n + 4 - U_n{}^2 = -(U_n + 1)(U_n - 4) \geq 0$ donc $U_{n+1} \geq U_n$ car $U_n \geq 0$

d'où U est une suite strictement croissante

c) * U est une suite strictement croissante et majorée par 4 donc elle converge vers une limite L

* Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{3x + 4}$

On a $f(U_n) = U_{n+1}$ et f est continue sur $\left[-\frac{4}{3} ; +\infty\right[$ or $L \in [0;4]$ doc f est continue en L

donc $f(L) = L \Leftrightarrow \sqrt{3L + 4} = L \Leftrightarrow 3L + 4 = L^2 \Leftrightarrow L^2 - 3L - 4 = 0 \Leftrightarrow L = -1 \notin [0;4]$ ou $L = 4$

D'où U converge vers 4

2/a) On a : $4 - U_{n+1} = 4 - \sqrt{3U_n + 4} = \dfrac{3}{4 + \sqrt{3U_n + 4}}(4 - U_n)$

Or $0 \leq U_n \leq 4 \Leftrightarrow 6 \leq 4 + \sqrt{3U_n + 4} \leq 8 \Leftrightarrow \dfrac{1}{8} \leq \dfrac{1}{4 + \sqrt{3U_n + 4}} \leq \dfrac{1}{6} \Leftrightarrow \dfrac{3}{8} \leq \dfrac{3}{4 + \sqrt{3U_n + 4}} \leq \dfrac{1}{2}$

Et comme $4 - U_n \geq 0$ donc $0 \leq \dfrac{3}{4 + \sqrt{3U_n + 4}}(4 - U_n) \leq \dfrac{1}{2}(4 - U_n) \Leftrightarrow 0 \leq (4 - U_{n+1}) \leq \dfrac{1}{2}(4 - U_n)$

b) Soit $P' : \forall n \in \mathbb{N}\ ;\ 0 \leq 4 - U_n \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$

* Pour n=0 on a : $0 \leq 4 - U_0 = 4 \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 4$ donc P' est vraie

* Soit $n \in \mathbb{N}$; Supposons que : $0 \leq 4 - U_n \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et Montrons que $0 \leq 4 - U_{n+1} \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

D'après 2/a) on a : $0 \leq \left(4 - U_{n+1}\right) \leq \frac{1}{2}\left(4 - U_n\right) \leq \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Cl : $\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ 0 \leq 4 - U_n \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$

c) On a $0 \leq 4 - U_n \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 4\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 4$

3/ On a $0 \leq 4 - U_n \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^n \Leftrightarrow 0 \leq \sum\limits_{k=1}^{n} 4 - U_k \leq \sum\limits_{k=1}^{n} 4\left(\frac{1}{2}\right)^k \Leftrightarrow 0 \leq \sum\limits_{k=1}^{n} 4 - \sum\limits_{k=1}^{n} U_k \leq 4\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k$

Or $\sum\limits_{k=1}^{n} 4 = 4n$ et $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}\right) = \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ Somme d'une S.G de raison $\frac{1}{2}$

D'où $0 \leq 4n - S_n \leq 4\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

$$0 \leq 4n - S_n \leq 4\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \Leftrightarrow -4n \leq -S_n \leq -4n + 4\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

b) On a : $\Leftrightarrow 4n - 4\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \leq S_n \leq 4n$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} 4n - 4\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$